

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Dans le problème E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

$[1, n]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n .

I.1.a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{C})$, montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

b. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables, alors $\text{Tr} A = \text{Tr} B$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, deux matrices qui représentent u dans deux bases distinctes de E ont alors la même trace, on définit ainsi le complexe $\text{Tr} u$.

c. Vérifier que $\text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u)$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

2.a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure, expliciter les valeurs propres de A en fonction des coefficients de A .

b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est nilpotent si et seulement si toutes ses valeurs propres sont nulles.

3. a. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$, on définit le déterminant de Vandermonde :

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix}, \text{ montrer que } V(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i).$$

b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant la propriété suivante : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr} u^k = 0$; en considérant une matrice triangulaire supérieure représentant u dans une certaine base, établir un système infini d'équations d'inconnues les valeurs propres de u . En regroupant entre elles les valeurs propres égales, démontrer que u est nilpotent.

II. On suppose dans toute cette partie que $n = 2$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, établir une relation entre u^2 , u , $\text{Tr} u$ et $\det u$. (On pourra étudier u sur une base de E .)

Dans la suite de cette partie u et v désignent deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.

2. Montrer que u ne peut être inversible, en déduire une expression simple de u^2 .

On suppose dans toute la suite que $u \neq 0$.

3. a. Montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer qu'il existe a et λ dans $\mathbb{C}$ tels que la matrice de v dans la base B s'écrive $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$.

c. Démontrer qu'il existe une base B' de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice de v $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$.

4. On cherche maintenant à trouver en fonction de u et v tous les $w \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ w - w \circ u = u$.
- Donner la forme de la matrice de w dans la base B' , en déduire l'existence de α et β dans $\mathbb{C}$ tels que $w = v + \alpha \text{Id}_E + \beta u$.
 - Montrer réciproquement que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $v + \alpha \text{Id}_E + \beta u$ est solution.
5. On cherche de même les endomorphismes x solutions de $x \circ v - v \circ x = x$. Donner la forme de la matrice de x dans la base B' , en déduire l'ensemble des solutions en fonction de u .

III. n est maintenant supposé quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $(u, v) \in [\mathcal{L}(E) \setminus \{0\}] \times \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et de k . (On pourra procéder par récurrence.)
- En déduire que u est nilpotent.
- a. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$. Montrer de plus que s'il existe un entier p tel que $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$, alors pour tout entier supérieur ou égal à p on a $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$. En déduire l'existence d'un tel entier.

On suppose dans toute la suite que $\dim \text{Ker } u = 1$.

- Démontrer que $\forall k \in [1, n]$, $\dim \text{Ker } u^k = k$.
4. a. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille de vecteurs $B = (u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), \dots, u(x_0), x_0)$ soit une base de E .
- Donner pour tout $k \in [1, n]$ une base de $\text{Ker } u^k$.
 - Montrer que pour tout $k \in [1, n]$, $\text{Ker } u^k$ est stable par v . Que peut-on en déduire concernant la forme de la matrice de v dans la base $B = (u^{n-1}(x_0), \dots, u(x_0), x_0)$?
5. a. Écrire la matrice de u dans la base B , donner ensuite une forme plus précise de la matrice de v dans la base B . On appellera $(a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ cette matrice, montrer que cette matrice est entièrement déterminée par la donnée des coefficients $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$.
- On appelle v_0 l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base B est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & n-1 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $v = v_0 + P(u)$.

- Soit v_0 un élément de $\mathcal{L}(E)$ ayant $0, 1, \dots, n-1$ pour valeurs propres.

Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de v_0 . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u \circ v_0 - v_0 \circ u = u$, déterminer u à $n-1$ constantes près.

- On suppose qu'on a deux éléments u_1 et v_1 de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $u_1 \circ v_1 - v_1 \circ u_1 = \alpha u_1 + \beta v_1$ avec $\alpha\beta \neq 0$, trouver en fonction de u_1 et v_1 deux endomorphismes u et v vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.